矩阵分析速查表

赖泽强

2021 年 1 月 9 日

目录

1 重要技能

1. 求行列式
2. 求特征值
3. 求特征向量
4. 化简阶梯型

2 各种术语

2.1 XX 矩阵

- **酉矩阵**：$A^H A = E$
- **正规矩阵**: $A^H A = AA^H$, 包括对称矩阵，反对称矩阵，Hermite 矩阵，反 Hermite 矩阵，正交矩阵，酉矩阵等。
- **单纯矩阵**：可以对角化的矩阵，即有 n 个线性无关的特征向量。
- **Hermite 矩阵**: $A^H = A$；**反 Hermite 矩阵**：$A^H = -A$。Hermite 矩阵是特征值全为实数的矩阵。
- **正交矩阵**：行向量，列向量都是正交的**单位向量**。
- **正定矩阵**：$x^T Ax > 0$ ：$x = [x_1, x_2, ..., x_n]$, 对于所有的非零 x 恒大于 0。正定矩阵的所有特征值大于 0。

2.2 矩阵可 XX

- **酉对角化**：$A = Q\Lambda Q^H$, **普通对角化**: $A = Q\Lambda Q^{-1}$

2.3 矩阵的 XX

- **核**：Ax=0 的解空间，也叫零空间，null space，记作 N(A)。
- **值域**：矩阵列向量构成的线性空间，英文是 range，记作 R(A)。

2.4 Jordan 相关

- **λ 矩阵**：矩阵的每个元素都是 λ 的多项式。
- λ 矩阵的 **Smith 标准形**：经过初等变换与原 λ 矩阵等价的一个对角矩阵，具体看后面。

Smith 标准形

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$d_i(\lambda)$ 是首项系数为 1 的多项式，且后者能整除前者，0 除外，数学定义如下：

$$d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda) \quad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

- λ 矩阵的**不变因子**：Smith 标准形对角线上的非零元素。
- λ 矩阵的**初等因子**：先将不变因子统统化成一次方幂的乘积，这些乘积的所有因子称为初等因子。
- **k 阶行列式因子**：$D_k(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)...d_k(\lambda)$。

3 计算

3.1 线性空间

3.1.1 基变换的过渡矩阵

从基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ 的过渡矩阵：

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)P$$

3.1.2 坐标变换

x 是在 α 基下的坐标，y 是 β 基下的坐标。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.1.3 线性变换在不同基下的矩阵表示

3.2 Jordan

3.2.1 λ 矩阵化 Smith 标准形

使用初等变换，即交换行（列），行（列）乘一个倍数，行（列）乘一个倍数加（减）到另一行（列）。

计算技巧 如下：

1. 将公因子，常数往对角线上移动，然后把同一行同一列的其他元素都化成 0。
2. 逐层进行。

一个例子 ：

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} \overset{c_1 \longrightarrow c_2}{\simeq} \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \\ 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \end{bmatrix}$$
$$\overset{r_1 \longrightarrow r_2}{\simeq} \begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}c_1}{\simeq} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ \frac{2\lambda^2}{3} & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix}$$

一种特殊的情况 是对角形，但不是 Smith 标准形，见 p69, 实际 p63。

3.2.2 求初等因子 & 不变因子

对于小矩阵可以先求 **k 阶行列式因子** $D_k(\lambda)$，然后再利用下面的关系求**不变因子** $d_k(\lambda)$。

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, ..., d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_r - 1(\lambda)}$$

然后**初等因子**就是不变因子除了 1 以外的因数。

3.2.3 求矩阵的 Jordan 标准形

假设要求矩阵 A 的 Jordan 标准形，则步骤如下

1. 先算 $\lambda E - A$ 的 Smith 标准形，然后求出初等因子。
2. 根据初等因子构造 Jordan 块。ß
3. 用 Jordan 块组成 Jordan 标准形。

构造 Jordan 块 ：

设初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{n_s}$，则其对应的 Jordan 块包含 n_i 行（列），对角线元素均为 λ_i。

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

例子 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准形。

解 先求 A 的初等因子，对 $(\lambda E - A)$ 运用初等变换可得

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

A 的初等因子是

$$\lambda - 1, (\lambda-1)^2$$

故 A 的 Jordan 标准形是

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.4 求相似变换矩阵

主要利用 $AP = PJ$ 这个等式列方程求解，例如：

$$AP = [Ax_1 \;\; Ax_2 \;\; Ax_3] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & 1 \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ax_1 = 4x_1, \quad Ax_2 = 4x_2, \quad Ax_3 = x_2 + 4x_3$$

从上述三个方程**任取**三个解即可构成相似变换矩阵。

具体有点麻烦，最好看下书或 PPT。

3.2.5 求矩阵秩的方法求 Jordan 标准形

挺好用的，应该要学一下，小矩阵（3*3）算 Jordan 标准形用这个好用。

看魏丰老师的 PPT，第二章，PPT66 页。

1. 先求特征值
2. 然后求 $(\lambda I - A)^i$ 的 rank，如果 $rank((\lambda I - A)^i) = m$，那么就有 $n - m$ 个对角线为 λ 的**大于等于 i 阶**的 Jordan 块。书上有详细例题。

3.3 内积空间 & 正规矩阵 &Hermite 矩阵

3.3.1 Schmidt 正交化

α_i 是需要正交化的向量，β_i 是正交化后的向量。

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \alpha_1 \\
\beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 \\
\beta_3 &= \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 \\
\vdots &\vdots \quad \vdots \\
\beta_r &= \alpha_r - \frac{(\alpha_r, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_r, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})}\beta_{r-1}
\end{aligned}$$

3.3.2 对角化 && 酉对角化

如果一个矩阵有 n 个线性无关的特征向量，则它可以被它的特征向量对角化。Q 的列向量是 A 的单位特征向量。

$$\Lambda = Q^{-1}AQ$$

如果矩阵 A 是正规矩阵[1]，那么 $Q^H = Q^{-1}$，因此上式可以写成，这种对角化也叫酉对角化，因为 Q 是个酉矩阵:

$$\Lambda = Q^H AQ$$

当 A 是正规矩阵时，我们解出来的特征向量一定是正交的，随便取 n 个就可以了，注意要**单位化**。

3.3.3 化 Hermite 二次型为标准形

将二次型用矩阵表示 ：$f(x) = x^H Ax$, 要点，A 的第 i 行，j 列是 $x_j\overline{x_i}$ 的系数。

化标准形 ：求出 A 之后，按对称矩阵对角化的方法对角化即可。

[1] 对称矩阵是正规矩阵的一种特例。

3.4 矩阵分解

3.4.1 满秩分解

一个 m*n 的矩阵 A，其秩为 r，则其可以分解成一个 m*r 的矩阵 B，乘上一个，r*n 的矩阵 C，且 B，C 的秩也为 r。满秩分解不唯一。

求解方法 ：结合例题看。

- 对 A 进行初等行变换，化成行简化阶梯形。
- B 就是 **A 中**行简化阶梯形线性无关列所在列所构成的矩阵。
- C 就是行简化阶梯形去掉非零行构成的矩阵。

例题 ：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -14 \\ -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -5 & 5 & -7 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{25}{7} \end{bmatrix}$$

3.4.2 正交三角分解

3.4.3 奇异值分解

这部分内容不太好总结，最好多看例题。

1. 计算 AA^H 的特征值。
2. 先求出非零特征值对应的正交特征向量组，记作 U_1，可能还需要算零特征值的特征向量组 U_2，注意正交化。
3. 使用 $V_1 = A^H U_1 \Delta^{-H}$ 计算 V_1，V_1 的特征向量数目可能不够，还需要计算与 V_1 正交的向量组 V_2。
4. 最后 $A = [U1, U2]\Delta[V_1, V_2]^H$, 注意 Σ 对角线上是**奇异值（特征值开根号）**不是特征值。

3.4.4 谱分解

谱分解是矩阵对角化的一种表达形式。因为矩阵对角化要求矩阵必须有 n 个线性无关的特征向量，因此只有单纯矩阵和正规矩阵（单纯矩阵的特例），可以进行谱分解。

正规矩阵满足：

$$A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^H$$

谱分解：

$$
\begin{aligned}
A &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \begin{bmatrix} \alpha_1^H \\ \alpha_2^H \\ \vdots \\ \alpha_n^H \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^H + \lambda_2 \alpha_2 \alpha_2^H + \cdots + \lambda_n \alpha_n \alpha_n^H
\end{aligned}
$$

求解步骤：

1. 计算特征值，求每个特征值对应的特征向量。如果一个特征值对应多个特征向量，**注意选取正交的特征向量组**。
2. 特征向量一定要**单位化**！
3. 求 $\alpha_1\alpha_1^H, \lambda_2\alpha_2\alpha_2^H, ...$ 即可。

单纯矩阵类似，但是要矩阵的逆。**单纯矩阵不要求特征向量单位化，正交化**[2]

$$
A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U^{-1}
$$

总结就是 U 的列向量乘 U^H 或 U^{-1} 的行向量。

3.4.5 极分解

3.5 范数

3.5.1 向量范数

1. 1-范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
2. 2-范数：$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^H x\right)^{\frac{1}{2}}$
3. ∞-范数：$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = max|x_i|$

3.5.2 矩阵范数

1. F-范数：$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
2. 以下为诱导范数：**注意绝对值**
   - 1-范数：$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|\right) \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，也叫列和范数。
   - 2-范数：$\|A\|_2 = \max_j \left(\lambda_j \left(A^H A\right)\right)^{\frac{1}{2}}$，最大正奇异值，也叫谱范数。
   - ∞-范数：$\|A\|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$, 也叫行和范数。

3.5.3 谱半径 $\rho(A)$

定义在 186 页，定义如下：
谱半径，$\rho(A) = max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_n|)$，其中 λ_i 为矩阵 A 的特征值。

- 对任意方阵有，$\rho(A) <= ||A||$，谱半径小于任意范数。
- 若 A 是正规矩阵，则 $\rho(A) = ||A||_2$。

[2]正规矩阵的特征向量才正交（缺证明）。

3.6 矩阵函数

3.6.1 求矩阵的最小多项式

两种方法 ：

1. A 的最小多项式是其初等因子组的最小公倍式。这个方法一般用求秩的方法先求 Jordan 标准形。

3.6.2 求矩阵函数的 Jordan 表示

基本流程 如下：

1. 求矩阵 A 的 Jordan 标准形 J 和相似变换矩阵 P。
2. 求 f(J)：怎么求看后面。
3. $f(A)=Pf(J)P^{-1}$：求出 f(A) 的矩阵表达式，对于具体的函数（如 $e^A, e^{tA}, sinA$），将 A 替换成 x 进行求导后回代。

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(4)-2f'(4) & 2f'(4) & f'(4) \\ -2f'(4) & f(4)+2f'(4) & f'(4) \\ 0 & 0 & f(4) \end{bmatrix}$$

f(J) 的求法 ：

分块求，每一块的求法如下，求几阶导前面系数分母就几的阶乘。Hint：如果某个 Jordan 块是二阶的，按下面公式，只要求一阶导；只有 Jordan 块阶数大于 2 时才需要求更高阶导数。

$$f(J_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(d_i-1)!}f^{(d_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{d_i\times d_i}$$

3.6.3 求矩阵函数的多项式表示

课本 215 页，看例题，主要步骤如下：

1. 求最小多项式。
2. 列 p(x)
3. f(x)=p(x), f'(x)=p'(x)... 求系数
4. 得到 f(A) 的形式
5. 代入具体的 f 计算具体的形式。

3.7 函数矩阵

函数矩阵的各种运算基本等于对矩阵中的每个元素作一个相同的运算。

3.7.1 函数矩阵的逆矩阵

可以使用伴随矩阵/行列式的方法求。

$$A^{-1}(x)=\frac{1}{|A(x)|}\operatorname{adj}A(x)$$

伴随矩阵每个元素都是原矩阵对应元素的代数余子式。

3.7.2 矩阵微分方程

课本 P238. 看下 P241 的例题 7.4.1 基本就懂怎么做了。

3.8 求不相容线性方程组的最佳最小二乘解

4 结论

- 实对称矩阵不同特征值的特征向量一定是正交的。实对称矩阵同一特征值的不同特征向量线性无关。
- 矩阵 A 的所有特征值之和等于矩阵 A 的 trace（对角线元素之和）
- 多项式在 $1, x-a, (x-a)^2, ..., (x-a)^{n-1}$ 这组基下的坐标可以用泰勒展开式计算，如下：

$$\begin{aligned}f(x)=&f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{J(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\\&\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\end{aligned}$$

- 转置/共轭转置和求逆可以交换顺序，$(A^{-1})^H=(A^H)^{-1}$ 。
- 实对称矩阵/Hermite 矩阵的特征值是实数。

5 证明

5.1 证明矩阵/向量范数

向量范数 ：

- 非负性，当且仅当 x=0 时，x 的范数等于 0.
- 齐次性, $||kx||=|k|*||x||$
- 三角不等式：对于任意 x,y，都有 $||x+y||<=||x||+||y||$

矩阵范数 ：在向量范数基础上加一条

- 乘法相容性：$||AB||<=||A||*||B||$

Holder 不等式 ：常用于证明乘法相容性。

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Minkowski 不等式 ：常用于证明三角不等式。

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

5.2 矩阵幂级数收敛

题目一般都是要你证明某个矩阵幂级数收敛。首先你得学会求普通幂级数的收敛半径：

普通幂级数的收敛半径 ：

设 R 是幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径，则 R 为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

注意 a_n 是幂级数的系数。

证明矩阵幂级数收敛 ：使用定理

Theorem 5.1. *若矩阵 A 的某一种范数 $||A||$ 在幂级数*

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k+\cdots$$

的收敛域内（$-R<||A||<R$），则矩阵幂级数

$$c_0E+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_kA^k+\cdots$$

绝对收敛。

5.3 诱导范数相关

- **诱导范数**：
$$\|A\|_i=\max_{x\neq0}\frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}$$
- **相容范数**：若 $\|Ax\|_\alpha\leqslant\|A\|_\beta\|x\|_\alpha$，则称 $||A||_\beta$ 为与向量范数 $||x||_\alpha$ 相容的矩阵范数。

Tips ：

- 一个有用的性质：对于任何诱导范数，均有 $||I||=1$。
- 灵活运用范数的定义：乘法相容性，三角不等式，齐次性，非负性等。

5.4 矩阵序列的收敛性

- 若 $\rho(A)$ 谱半径小于 1，则收敛。若大于 1，则发散。
- 若谱半径等于 1，用 Jordan 标准形进行判断。